



**CENTRO UNIVERSITÁRIO FAMETRO  
ENGENHARIA CIVIL**

**RICARDO TAVARES DO CARMO**

**MÉTODOS ELEMENTOS FINITOS:  
análise de estrutura hiperestática – elemento de viga**

**FORTALEZA  
2022**

RICARDO TAVARES DO CARMO

## MÉTODOS ELEMENTOS FINITOS

análise de estrutura hiperestática – elemento de viga

Esta monografia apresentada no dia 24 de junho de 2022 como requisito para a obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil da Faculdade Metropolitana da Grande Fortaleza – UNIFAMETRO – tendo sido aprovado pela banca examinadora composta pelos professores abaixo:

FORTALEZA

2022

---

C287m Carmo, Ricardo Tavares do.  
Métodos elementos finitos : análise de estrutura – elemento de viga / Ricardo Tavares do Carmo. – Fortaleza, 2022.  
46 f. ; 30 cm.

Monografia - Curso de Graduação em Engenharia Civil, Centro Universitário Fametro - Unifametro, Fortaleza, 2022.  
Orientador: Prof. Me. Onézimo Carlos Viana Cardoso.

1. Engenharia Civil – Método dos elementos finitos. 2. Engenharia Civil – Equações. 3. Viga Hiperestática – Simulação. I. Título.

RICARDO TAVARES DO CARMO

## MÉTODOS ELEMENTOS FINITOS

análise de estrutura hiperestática – elemento de viga

Esta monografia apresentada no dia 24 de junho de 2022 como requisito para a obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil da Faculdade Metropolitana da Grande Fortaleza – UNIFAMETRO – tendo sido aprovado pela banca examinadora composta pelos professores abaixo:

### BANCA EXAMINADORA

---

Profº. M.e Onézimo Carlos Viana Cardoso  
Orientador – Faculdade Metropolitana da Grande Fortaleza - Unifametro

---

Profº. Esp. Kaio Gefferson de Almeida Mesquita  
Membro - Faculdade Metropolitana da Grande Fortaleza - Unifametro

---

Profº. Dr. Francisco Ilson da Silva Junior  
Membro – Universidade Federal do Ceará - UFCe

## AGRADECIMENTOS

Ao Eterno (יְהוָה הַקְּדוֹשׁ בְּרוּךְ הוּא), por me conceder o dom da vida e a contemplar com suas graças, dentre elas a mais preciosa de todas, meus pais Luzanira Tavares e José Ferreira, que, nas lutas da vida, são meus pilares; nas dificuldades, o meu amparo e consolo; nas vitórias, experimentei o amor mais puro e sincero da minha vida, pois, através do exemplo de luta, força e coragem de vocês que pude conquistar muitas vitórias tão importantes quanto esta ב"ס ד".

Aos professores Jefferson e Onézimo, que me orientaram na produção deste trabalho.

Gratidão tem uma profunda conexão com humildade. Reconhecer que aquilo que somos e aquilo que temos se deve a outros e, acima de tudo, ao Eterno (יהוה).”

Rabi Jonathan Sacks

## RESUMO

O Método dos Elementos Finitos - MEF é uma técnica matemática que permite, através da divisão de um contínuo, a obtenção da solução aproximada de um problema, conservando as características do meio inicial. Essa caracterização é feita através de equações diferenciais solucionadas por modelos matemáticos, que conduzem à solução esperada. Seu princípio deu-se no século XVIII, porém só foi possível perceber quão poderosa é a técnica, através do advento dos computadores, no início da década de 50, e de seu uso na engenharia auxiliada por computador - CAE, que facilitou a solução das equações algébricas com alto grau de complexidade. O MEF se mostra adequado às diversas áreas das ciências exatas e das engenharias, possuindo grande número de aplicações de eficiência comprovada. Há um grande volume de trabalhos que utilizam o Método dos Elementos Finitos, com o intuito de obter tensões, deformações e vibrações de corpos de diversas geometrias. Essa ferramenta se mostra competitiva em relação a outros métodos disponíveis, e, visto isso, é relevante o estudo de suas aplicações, a fim de que esta continue a proporcionar benesses às diversas áreas das ciências e engenharias. Outro importante benefício do MEF no contexto de simulação é que ele torna possível a análise de diversas situações, sem a necessidade de construção de inúmeros protótipos, proporcionando a redução de custo dos projetos. Com respeito ao MEF, o presente trabalho tratou da resolução de uma viga hiperestática, para esse fim, adotamos a metodologia de resolução analítica, que conduziu a resultados satisfatórios, uma vez que os softwares fazem uso do MEF em sua estrutura interna, para resolver problemas de diversas áreas, sejam elas estruturais, elétricas, mineração dentre outras.

Palavras chaves: Método dos Elementos finitos, equações, simulação, engenharia.



## ABSTRACT

The Finite Element Method - FEM is a mathematical technique that allows, through the division of a continuum, to obtain the approximate solution of a problem, preserving the characteristics of the initial medium. This characterization is done through differential equations solved by mathematical models, which lead to the expected solution. Its beginning took place in the 18th century, but it was only possible to perceive how powerful the technique is, through the advent of computers, in the beginning of the 50's, and its use in computer-aided engineering - CAE, which facilitated the solution of algebraic equations with a high degree of complexity. The FEM is suitable for several areas of exact sciences and engineering, having a large number of applications with proven efficiency. There is a large volume of works that use the Finite Element Method, in order to obtain tensions, deformations and vibrations of bodies of different geometries. This tool proves to be competitive in relation to other available methods, and, given that, the study of its applications is relevant, so that it continues to provide benefits to the various areas of science and engineering. Another important benefit of FEM in the context of simulation is that it makes it possible to analyze different situations, without the need to build numerous prototypes, thus reducing the cost of projects. With respect to the FEM, the present work dealt with the resolution of a hyperstatic beam, for this purpose we adopted the analytical resolution methodology, which led to satisfactory results, since the software makes use of the FEM in its internal structure, to solve problems of areas, whether structural, electrical, mining, among others.

Keywords: Finite Element Method; equations; simulation; engineering.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	14
1.1	Objetivos	19
1.2	Justificativa	19
1.3	Estrutura do trabalho	19
1.4	Problemática do trabalho	20
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	21
2.1	Classificação da pesquisa	21
2.2	Procedimentos metodológicos	21
2.3	Levantamento bibliográfico	21
<b>3</b>	<b>TIPOS DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS</b>	23
3.1	O elemento viga	24
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO E ANÁLISE DE CASO</b>	26
4.1	Análise da Estrutura Hiperestática	26
4.1.1	<i>Graus de liberdade</i>	27
4.1.2	<i>Matriz de Rigidez Local</i>	27
4.1.3	<i>Matriz de Rigidez Global</i>	29
4.1.4	<i>Forças Internas na Estrutura</i>	29
4.1.5	<i>Matriz de Força [F]</i>	32
4.1.6	<i>Determinação dos deslocamentos dos nós</i>	32
4.1.7	<i>Determinação das forças internas</i>	33
4.2	Verificação dos resultados	34
4.2.1	<i>Ambiente ANSYS</i>	35
4.2.2	<i>Refinamento da malha (Esforço cortante e momento fletor)</i>	37
4.2.3	<i>Refinamento da malha (Deslocamentos)</i>	39
4.2.4	<i>Resultados no FTOOL</i>	41
<b>5</b>	<b>TABELAS E RESULTADOS</b>	42
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	45
	REFERÊNCIAS	46

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sólido Contínuo .....	15
Figura 2 - Sólido Discretizado .....	15
Figura 3 - Discretização em nós .....	15
Figura 4 - Separação dos Elementos .....	16
Figura 5 - Deformação Não linear de uma barra .....	16
Figura 6 - Discretização em primeira ordem .....	16
Figura 7-Discretização em segunda ordem .....	17
Figura 8 - Viga com dois apoios .....	17
Figura 9 - Elemento infinitesimal .....	18
Figura 10 - Análise do elemento infinitesimal .....	18
Figura 11 – Viga em balanço.....	25
Figura 12 - Viga Biapoiada .....	25
Figura 13 - Viga contínua .....	25
Figura 14 - Viga Hiperestática .....	27
Figura 15 - Decomposição da estrutura em graus de liberdade.....	27
Figura 16 - Elemento 01 Nós 01 e 02.....	28
Figura 17- Elemento 02 Nós 02 e 03.....	28
Figura 18 - Elemento 03 Nós 03 e 04.....	29
Figura 19 - Análise do elemento 01.....	30
Figura 20 - Análise do elemento 02.....	30
Figura 21- Análise do elemento 03.....	31
Figura 22 - Inserção das forças calculadas na estrutura .....	32
Figura 23 - Compartilhamento de pontos estruturais .....	35
Figura 24 - Apoios e engastes.....	36
Figura 25 - Carregamento retangular distribuído.....	36
Figura 26 - Carregamento triangular distribuído.....	37
Figura 27 - Refinamento em malha de 100mm. ....	37
Figura 28 - Refinamento em malha de 50mm. ....	38
Figura 29 - Refinamento em malha de 25mm. ....	38
Figura 30 - Refinamento em malha de 10mm. ....	39
Figura 31 - Refinamento em malha de 100mm .....	39
Figura 32 - Refinamento em malha de 50mm .....	40
Figura 33 - Refinamento em malha de 25mm .....	40
Figura 34 - Refinamento em malha de 10mm .....	40
Figura 35 - Análise do Momento Fletor no FTOOL .....	41
Figura 36 - Análise do Esforço Cortante no FTOOL.....	41

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Método analítico .....	42
Tabela 2 - Método dos Elementos Finitos .....	42
Tabela 3 - Análise Comparativa .....	43
Tabela 4 - Análise estatística das reações, momentos e deslocamentos .....	43

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Resultado da Análise Comparativa.....	44
---	----

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Silva (2008), o Método dos Elementos Finitos – MEF teve sua origem na obra de Leonhard Euler (1707-1783), a partir do método das diferenças finitas, através do qual é possível obter soluções de problemas de valor inicial. Segundo a referência anterior, Euler o primeiro matemático de sua época a apresentar o uso do método de diferenças finitas para encontrar aproximações de soluções de equações diferenciais. No entanto, os primeiros escritos matemáticos sobre MEF podem ser encontrados nos trabalhos de Schnellback (1851 apud HARISH, 2020) e Courant (1943 apud HARISH, 2020).

Após a segunda guerra mundial, sobretudo após o início da década de 1950, houve grande avanço nesta área através dos artigos de Turner, Clough, Martin e Topp (1956 apud HARISH, 2020), Argyris (1957 apud HARISH, 2020) e Babuska e Aziz (1972 apud HARISH, 2020) Os livros de Zienkiewicz (1971 apud HARISH, 2020) e Strang, e Fix (1973 apud HARISH, 2020) também foram importantes precursores para o crescimento e o futuro do MEF.

A análise através do Método dos Elementos Finitos - MEF é uma técnica numérica usada, como solução aproximada para diversos problemas nas áreas das ciências e engenharias, e começou a ser utilizado na área de engenharia estrutural, com o intuito de obter tensões, deformações e vibrações de corpos de diversas geometrias. Na mecânica dos fluidos, é usada em túneis de vento, em projeto de automóveis e aeronaves através da dinâmica dos fluidos computacionais (CFD). Em problemas térmicos, pode ser utilizada na análise de propagação de calor em determinada região ou em estrutura completa. Em eletromagnetismo, pode ser aplicada por exemplo, na variação e na distribuição do campo eletromagnético em um motor elétrico e na dissipação do calor em uma placa de circuito elétrico.

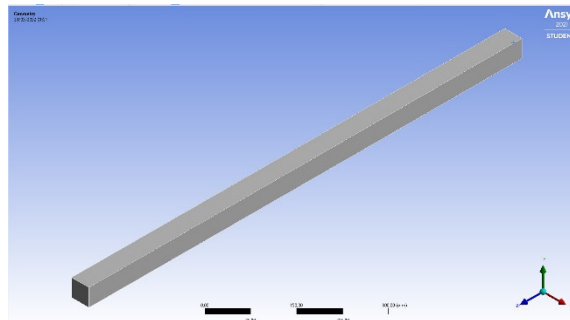
A base do MEF é fundamentada na discretização de um contínuo, o qual é o domínio da análise, em um número finito de subdomínios, que são os elementos, cuja finalidade é fornecer subsídios para uma solução aproximada, cuja construção pode ocorrer através da aplicação do método dos resíduos ponderados.

De modo geral, a aplicação do MEF pode ser decomposta pelas seguintes etapas:

- Divisão do contínuo em uma quantidade finita de elementos a qual é chamada discretização do domínio em subdomínios ou elementos;

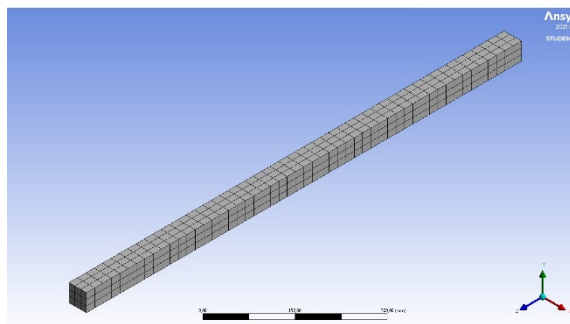
- Identificação das Funções de polinomiais de interpolação;
- Montagem da matriz de elementos que compõem o subdomínio;
- Obtenção da matriz global, composta pelas matrizes de cada subdomínio da geometria em questão;
- Análise das condições de contorno;
- Resolução de equações por aproximação do refinamento do elemento de malha.

Figura 1 - Sólido Contínuo



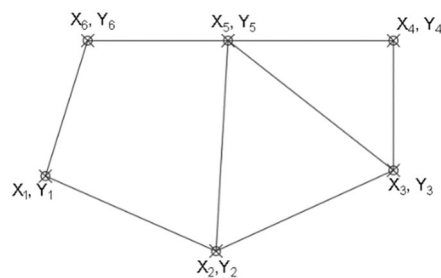
Fonte: Próprio autor, 2022

Figura 2 - Sólido Discretizado



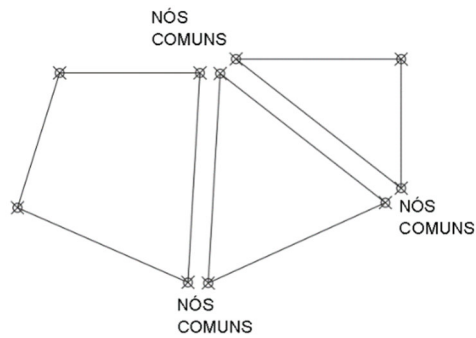
Fonte: Próprio autor, 2022

Figura 3 - Discretização em nós



Fonte: Próprio autor, 2022

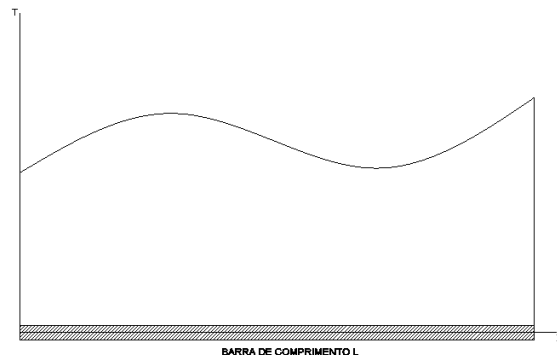
Figura 4 - Separação dos Elementos



Fonte: Próprio autor, 2022

No exemplo abaixo, tem-se a deformação de uma barra metálica em função da temperatura.

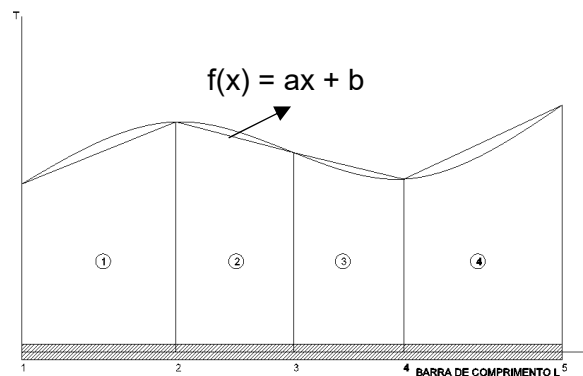
Figura 5 - Deformação Não linear de uma barra



Fonte: Próprio autor, 2022

Em seguida a discretização através de equações de primeira ordem,  $f(x) = ax + b$ . Onde cada elemento 1, 2, 3 e 4 é formado por uma equação do 1º grau.

Figura 6 - Discretização em primeira ordem

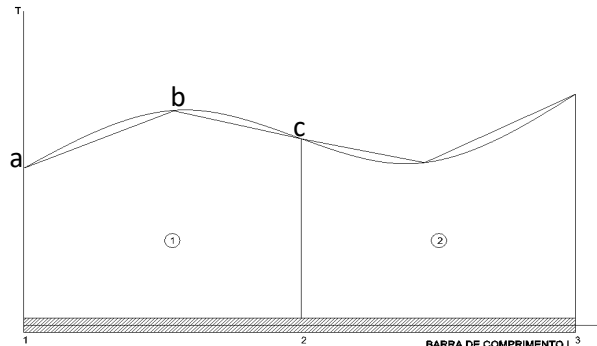


Fonte: Próprio autor, 2022



Então, tem-se a discretização através de equações de segunda ordem,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . em que cada elemento 1 e 2 são formados por uma equação do 2º grau.

Figura 7—Discretização em segunda ordem



Fonte: Próprio autor, 2022

Dessa forma, reduz-se o número de incógnitas através da discretização, permitindo fazer aproximações das funções por meio da interpolação polinomial dentro de cada elemento. O que nos concede a definição em termos de valores pontuais, ou seja, dos nós, os quais estão localizados ao longo dos limites do elemento, e se conectam aos elementos adjacentes.

Quanto maior for a capacidade de discretização de um domínio irregular, maior será a precisão da análise desta geometria, de modo geral, maior será o custo computacional para resolução do problema.

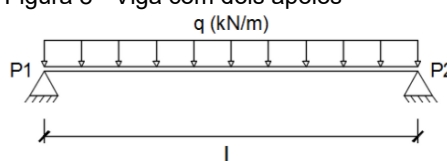
O método analítico é usado em problemas nos quais a configuração permite a imposição de condições de contorno de maneira simples, sendo possível, resolvê-los analiticamente, isto é, de forma exata.

Como exemplo, podemos citar uma viga com dois apoios e uma carga distribuída uniformemente. Neste caso, as condições de contorno podem ser aplicadas de maneira bastante simples, onde se tem que o momento nas extremidades é zero e os esforços cortantes nas extremidades assumem valores iguais em módulo.

$$M(0) = 0 \text{ e } M(L) = 0$$

$$V(0) = ql/2 \text{ e } V(L) = -ql/2$$

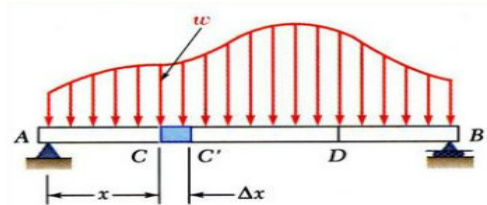
Figura 8 - Viga com dois apoios



Fonte: Próprio autor, 2022

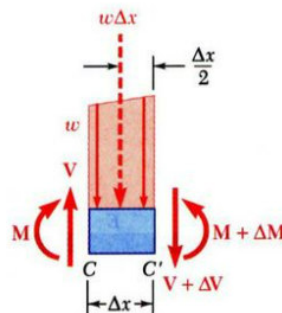
Contudo, há casos em que as condições de contorno não são fáceis de serem aplicadas, sobretudo, devido à complexidade da geometria que torna difícil o cálculo da inércia e das áreas, então, nesses casos, usa-se a solução aproximada, que, nesse contexto, usaremos o método dos elementos finitos.

Figura 9 - Elemento infinitesimal



Fonte: R.C. Hibbeler, 2009

Figura 10 - Análise do elemento infinitesimal



Fonte: R.C. Hibbeler, 2009

Tomando como exemplo a figura 10, em que  $V$  é o esforço cortante,  $M$  o momento fletor e  $W$  representa um carregamento aplicado ao elemento, temos que a relação entre carregamento e o esforço cortante, pode ser expressa por:

$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0 \rightarrow \Delta V = -w\Delta x \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w \therefore \frac{dV}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w \rightarrow \frac{dV}{dx} = -w$$

$$w \rightarrow \int dv = \int (-w dx) \rightarrow \mathbf{V = -\int w dx}$$

Por sua vez a relação entre o esforço cortante e o momento fletor

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(V - \frac{w\Delta x}{2}\right) \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

$$V \rightarrow \int dM = \int V dx \rightarrow \mathbf{M = \int V dx}$$

## **1.1 Objetivos**

O objetivo geral do presente estudo é a aplicação da ferramenta numérica do Método dos Elementos Finitos em análise de estrutura hiperestática de um elemento de viga.

Por sua vez, como objetivo específico, buscamos explicitar de forma simples o uso do Método dos Elementos Finitos, objetivando proporcionar um maior entendimento sobre o assunto, que, para alguns alunos do curso de Engenharia Civil, ainda é visto de forma complexa e abstrata, principalmente pela necessidade de uma base matemática consistente.

## **1.2 Justificativa**

A decisão pelo tema acima exposto advém da realidade que se vivencia hoje no estudo de engenharia civil na qual o discente não tem a oportunidade de ter contato com o assunto enquanto graduando, causando um déficit na compreensão de problemas complexos no futuro.

Na prática o conhecimento sobre MEF se mostra relevante, pois torna possível analisar diversas situações, sem a necessidade de construção de inúmeros protótipos, reduzindo com isso o custo dos projetos.

## **1.3 Estrutura do trabalho**

O trabalho está estruturado em sete capítulos. No Capítulo 1, é apresentada uma sucinta introdução, que viabiliza o entendimento do tema apresentado, explana os objetivos gerais e seus desdobramentos específicos, justificativa, assim, como uma apresentação da metodologia a ser trabalhada e a construção estrutural do texto.

O capítulo 2 há a contemplação dos tipos de estruturas de viga e suas classificações, assim como suas descrições e exemplos.

O capítulo 3, apresentam-se a classificação da pesquisa, os procedimentos metodológicos e o levantamento bibliográfico.

O capítulo 4, é apresentada a aplicação numérica em forma de estudo de caso.

O capítulo 5, são mostradas as tabelas e gráfico de resultados.

O capítulo 6, apresentam-se as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

O capítulo 7, são listadas as referências bibliográficas.

#### **1.4 Problemática do trabalho**

Qual o grau de precisão, obtido na resolução de uma viga hiperestática, calculada de forma tradicional, comparada a uma análise computacional através de um software de simulação?

## **2 METODOLOGIA**

Classificamos a seguir a pesquisa quanto à abordagem, aos objetivos, à natureza e aos procedimentos técnicos para atingir os objetivos.

### **2.1 Classificação da pesquisa**

No que se refere à abordagem do problema, tem-se uma pesquisa tanto qualitativa quanto quantitativa, pois, através do aumento da qualidade da malha, é possível se obter uma melhor aproximação dos resultados o que caracteriza seu caráter quantitativo.

Quanto aos objetivos, segundo Gil (2008), ela é classificada como exploratória, pois foi necessário um estudo para que o pesquisador se familiarizasse com o tema do problema levantado. Sendo, por esta razão, de suma importância a pesquisa bibliográfica para fornecer informações alusivas ao tema, permitindo nortear o caminho, para atingir o objetivo.

No que tange à natureza, esse trabalho se classifica como pesquisa de aplicação, pois foi desenvolvido um estudo sobre uma situação que apresenta um problema específico da engenharia de estruturas.

No que se refere aos procedimentos técnicos, a pesquisa é bibliográfica e experimental. Conforme acima citado, a etapa do levantamento do referencial teórico teve como objetivo principal o embasamento da pesquisa, cujas fontes principais foram livros, dissertações e publicações científicas.

### **2.2 Procedimentos metodológicos**

Conforme exposto acima, o objetivo geral desse trabalho é a análise estrutural de uma viga hiperestática composto por dois engastes e dois apoios. Para esta análise foi utilizado o método analítico. Com o intuito de comparar resultados, foram feitas análises através do software FTOOL e ANSYS, pois este, através do método dos elementos finitos, realiza a análise dos resultados e, por meio de tabelas, foram feitos o desvio padrão e a média das reações de apoio e dos momentos fletores dos resultados obtidos.

### **2.3 Levantamento bibliográfico**

Nessa etapa foi realizada a pesquisa da literatura sobre o tema em estudo. Foi utilizado, principalmente, o meio eletrônico para a obtenção do material bibliográfico com foco em trabalhos e estudos desenvolvidos nessa área tais como livros e trabalhos acadêmicos, que possibilitaram tanto o aprendizado do software ANSYS, como de toda a teoria necessária sobre o método dos elementos finitos, para que pudesse ser realizado o presente trabalho.

### 3 TIPOS DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Conforme Martha (2010), a análise de estruturas é a etapa da concepção estrutural em que é feita o levantamento das hipóteses do comportamento da estrutura. Sendo que este pode ser esboçado através de diversos parâmetros, em que se podem citar as deformações, os campos de tensões e os deslocamentos na estrutura.

De forma sucinta, a análise de estruturas tem a finalidade de determinar esforços externos (cargas e reações de apoio) e internos, e das respectivas tensões, assim como a determinação das deformações da estrutura e dos deslocamentos que estão sendo projetados.

Em face da necessidade de solução de problemas de análise de estrutural, o Método dos Elementos Finitos torna possível a aquisição de respostas para diversos problemas de engenharia.

Os tipos de análises e de elementos estruturais devem ser levados em consideração para a realização de uma análise estrutural precisa, haja vista que estes elementos antecedem a concepção do projeto.

Segundo Azevedo (2003), com relação aos tipos de análises, tem-se:

- Análise dinâmica ou estática: No domínio da engenharia civil, as ações, em geral, têm características dinâmicas, oriundas da existência de fenômenos dependentes do tempo ou da posição, em que não se consegue uma representação por ações estáticas, ou seja, levando-se em consideração as forças de inércia atreladas às acelerações as quais cada elemento do conjunto é exposto. Porém, em diversas situações, é necessário levar em consideração que as ações são aplicadas de forma gradual, desprezando-se as ações inerciais. Nesses casos, a análise é denominada estática.

- Análise não linear e linear: Denominamos análise linear ao estudo realizado quando os deslocamentos oriundos das ações externas são muito pequenos em comparação às dimensões dos elementos estruturais, ou seja, quando elas não afetam a geometria da estrutura na distribuição das tensões e dos esforços, por conseguinte, neste caso, todo o estudo realizado, baseia-se na geometria inicial não deformada. Quando as considerações acima não são atendidas, tem-se o caso de uma análise não linear.

Os tipos de estruturas, com respeito à geometria são reticuladas, laminares ou sólidas.

As estruturas reticuladas, de acordo com Azevedo (2003), são as formadas por barras prismáticas, nas quais suas dimensões transversais são consideradas exíguas em relação ao comprimento do respectivo eixo.

Há quatro tipos principais de estruturas reticuladas, a saber: grelhas, vigas, treliças e pórticos. Já as grelhas são, por construção, estruturas em que os esforços de suas cargas são sempre ortogonais ao plano em que se encontra a estrutura.

Os elementos que formam as estruturas laminares têm a mesma ordem de grandeza em duas dimensões, sendo que a outra dimensão é significativamente menor, caracterizando, assim, uma estrutura laminar, assim como parede, casca plana ou laje.

Por último, as estruturas sólidas, diferentemente das laminares e reticuladas, possuem geometria que não se repete indefinidamente ao longo de um eixo retilíneo.

De modo geral, uma estrutura, que não apresenta os atributos para se encaixar nas classificações de reticulada e laminar, é classificada como estrutura sólida, na qual se considera que a forma geométrica e as ações são repetidas de forma axialmente retilínea.

### **3.1 O elemento viga**

Conforme consta no item 14.4.1.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), as vigas são “elementos lineares em que a flexão é preponderante”, logo os esforços predominantes são momento fletor e força cortante.

As vigas podem ser dispostas na forma horizontal ou oblíquas, com um ou mais apoios (fixo ou móvel), engastes, dentre outros, de modo que tais elementos sejam no mínimo isostáticos, ou seja, o número de restrições é igual ao número de equações da estática.

As vigas podem ser confeccionadas em aço, ferro fundido, madeira, alumínio e concreto (armado ou protendido), sendo suas aplicações em diversas áreas e tipos de construções (SOUZA, RODRIGUES, 2008).

As vigas são comumente expostas a cargas verticais, a respeito das quais calculamos os esforços de flexão e cisalhamento. Quando cargas oblíquas são

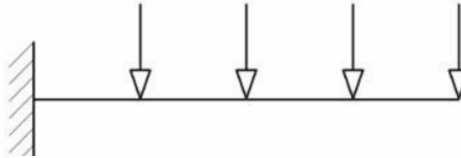


aplicadas à estrutura, surgirão forças axiais, tornando mais complexa a análise estrutural (PINTO, 2000).

A seguir trataremos dos três tipos mais comuns de vigas.

Viga em balanço: Viga de edificação com um único apoio (engaste). Nela, toda a carga recebida é transmitida a somente um ponto de fixação.

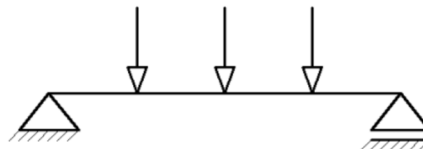
Figura 11 – Viga em balanço



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008

Viga biapoiada: Possui apenas dois apoios. É projetada para momento fletor máximo no centro da viga, dependendo da distribuição de carga neste elemento.

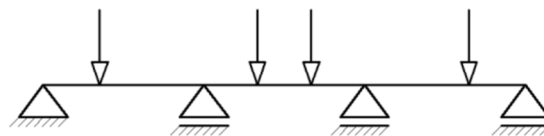
Figura 12 - Viga Biapoiada



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008

Viga contínua: Viga hiperestática, sobre mais de dois apoios, que é objeto de estudo no presente trabalho.

Figura 13 - Viga contínua



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008

## 4 APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO E ANÁLISE DE CASO

Nesta etapa do trabalho, delineamos a aplicação do método analítico, para a obtenção dos resultados, bem como a sua verificação através dos softwares já mencionados.

### 4.1 Análise da Estrutura Hiperestática

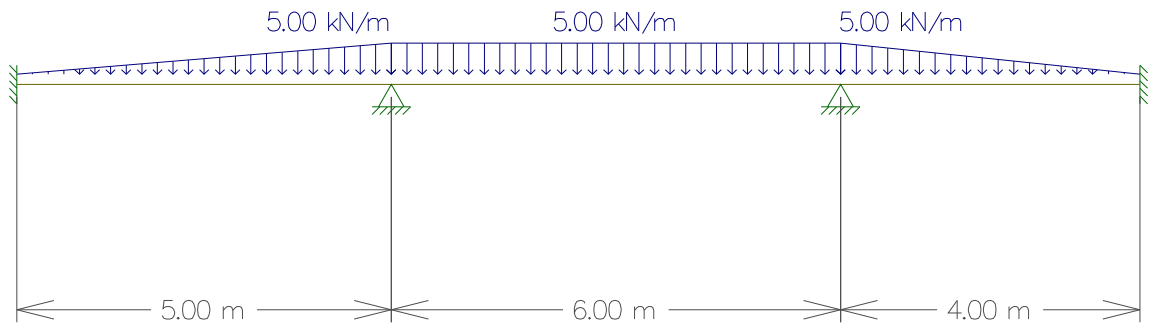
Com o propósito de esclarecer a abordagem, no presente trabalho, foi realizada uma comparação entre o método analítico, resolvido de forma tradicional e, em seguida, foi realizada uma análise computacional através de um software de simulação.

Consideremos a estrutura hiperestática representada pela figura abaixo e que atende às hipóteses físicas observadas no modelo de viga de Euler-Bernoulli.

- O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões;
- A viga é constituída de um material linearmente elástico;
- O Coeficiente de Poisson é negligenciável;
- A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele;
- Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação;
- O ângulo de rotação é muito pequeno;
- O efeito de momento de inércia de rotação é desprezado;
- A energia envolvida no cisalhamento é desprezada;
- A viga é constituída de material homogêneo com densidade  $\rho$ .

Desejamos determinar os esforços internos e deslocamentos nos nós da viga, cuja rigidez  $EI = 30\text{KN/m}^2$ .

Figura 14 - Viga Hiperestática

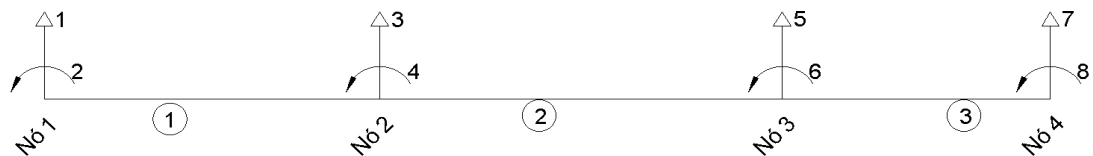


Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.1.1 Graus de liberdade

Em seguida, caracterizamos os graus de liberdade (deslocamento vertical e um giro), apoio, carga transversal ou pontual e o elemento, que nesse caso é a viga propriamente dita.

Figura 15 - Decomposição da estrutura em graus de liberdade



Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.1.2 Matriz de Rigidez Local

Destacamos a seguir a matriz de rigidez para cada elemento de viga que compõe a estrutura acima citada, na qual Filho (2010) demonstra como chegou ao resultado abaixo.

$$M_{ij}^e = \int_0^L B_i^T * EI * B_j dx = \begin{vmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{vmatrix}$$

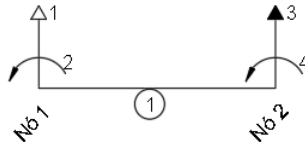
Sendo conhecidos os coeficientes que a compõe, facilmente, tem-se 3 matrizes, uma para cada elemento de viga, conforme exposto acima.

Elemento 01: L = 5,00m; EI = 30KN/m<sup>2</sup>

Matriz de rigidez do elemento 01, descrita abaixo:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 0 & 2,880 & 7,200 & -2,880 & 7,200 & 1 \\
 0 & 7,200 & 24,000 & -7,200 & 12,000 & 2 \\
 0 & -2,880 & -7,200 & 2,880 & -7,200 & 3 \\
 1 & 7,200 & 12,000 & -7,200 & 24,000 & 4 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 
 \end{array}$$

Figura 16 - Elemento 01 Nós 01 e 02



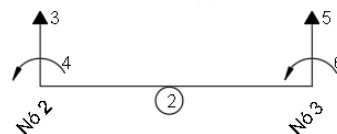
Fonte: Próprio autor, 2022

Elemento 02:  $L = 6,00\text{m}$ ;  $EI = 30\text{KN/m}^2$

Matriz de rigidez do elemento 02, descrita abaixo:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
 0 & 1,667 & 5,000 & -1,667 & 5,000 & 3 \\
 1 & 5,000 & 20,000 & -5,000 & 10,000 & 4 \\
 0 & -1,667 & -5,000 & 1,667 & -5,000 & 5 \\
 2 & 5,000 & 10,000 & -5,000 & 20,000 & 6 \\
 \hline
 & 0 & 1 & 0 & 2 & 
 \end{array}$$

Figura 17- Elemento 02 Nós 02 e



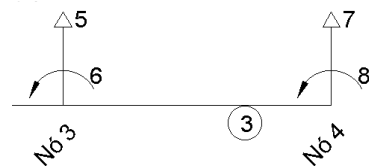
Fonte: Próprio autor, 2022

Elemento 03:  $L = 4,00\text{m}$ ;  $EI = 30\text{KN/m}^2$

Matriz de rigidez do elemento 03, descrita abaixo:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 0 & 5,625 & 11,250 & -5,625 & 11,250 & 5 \\
 2 & 11,250 & 30,000 & -11,250 & 15,000 & 6 \\
 0 & -5,625 & -11,250 & 5,625 & -11,250 & 7 \\
 0 & 11,250 & 15,000 & -11,250 & 30,000 & 8 \\
 \hline
 & 0 & 2 & 0 & 0 & 
 \end{array}$$

Figura 18 - Elemento 03 Nós 03 e



Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.1.3 Matriz de Rigidez Global

Alocação das matrizes de rigidez local [M], na formação da matriz de rigidez global da estrutura, [K], pode ser observada a seguir:

$$[K] = \begin{array}{c|cccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 \hline
 0 & 2,880 & 7,200 & -2,880 & 7,200 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1 \\
 0 & 7,200 & 24,000 & -7,200 & 12,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 2 \\
 0 & -2,880 & -7,200 & 4,547 & -2,200 & -1,667 & 5,000 & 0,000 & 0,000 & 3 \\
 1 & 7,200 & 12,000 & -2,200 & 44,000 & -5,000 & 10,000 & 0,000 & 0,000 & 4 \\
 0 & 0,000 & 0,000 & -1,667 & -5,000 & 7,292 & 6,250 & -5,625 & 11,250 & 5 \\
 2 & 0,000 & 0,000 & 5,000 & 10,000 & 6,250 & 50,000 & -11,250 & 15,000 & 6 \\
 0 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -5,625 & -11,250 & 5,625 & -11,250 & 7 \\
 0 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 11,250 & 15,000 & -11,250 & 30,000 & 8 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 
 \end{array}$$

Com matriz de graus de liberdade, expressa por:

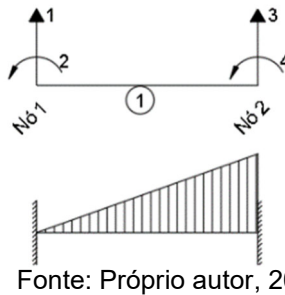
$$[K_{\text{graus de liberdade}}] = \begin{vmatrix} 44,000 & 10,000 \\ 10,000 & 50,000 \end{vmatrix}$$

#### 4.1.4 Forças Internas na Estrutura

Tratamos agora da determinação das forças que atuam em cada viga da estrutura.

Decompondo-se a viga conforme destacado, tem-se a seguinte configuração para o primeiro elemento de viga:

Figura 19 - Análise do elemento 01



Fonte: Próprio autor, 2022

Com suas respectivas reações e momentos expressos, conforme explicitados nos cálculos abaixo seguidos de sua representação matricial:

$$R_1 = \frac{3 \cdot q \cdot L}{20} \rightarrow R_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{20} \rightarrow R_1 = 3,750 \text{KN}$$

$$M_2 = \frac{q \cdot L^2}{30} \rightarrow M_2 = \frac{5 \cdot 5^2}{30} \rightarrow M_2 = 4,167 \text{KN.m}$$

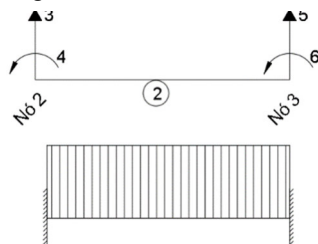
$$R_3 = \frac{7 \cdot q \cdot L}{20} \rightarrow R_3 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{20} \rightarrow R_3 = 8,750 \text{KN}$$

$$M_4 = \frac{-q \cdot L^2}{20} \rightarrow M_4 = \frac{-5 \cdot 5^2}{20} \rightarrow M_4 = -6,250 \text{KN.m}$$

$$[F_1] = \begin{bmatrix} 3,750 \\ 4,167 \\ 8,750 \\ -6,250 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, o segundo elemento de viga é mostrado:

Figura 20 - Análise do elemento 02



Fonte: Próprio autor, 2022

Suas reações de apoio e momentos estão calculadas abaixo, seguidas de sua representação matricial:

$$R_3 = \frac{q \cdot L}{2} \rightarrow R_3 = \frac{6 \cdot 5}{2} \rightarrow R_3 = 15,000 \text{KN}$$

$$M_4 = \frac{q \cdot L^2}{12} \rightarrow M_4 = \frac{5 \cdot 6^2}{12} \rightarrow M_4 = 15,000 \text{KN.m}$$

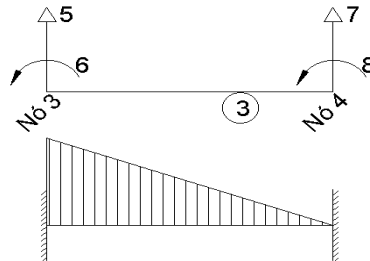
$$R_5 = \frac{q \cdot L}{2} \rightarrow R_5 = \frac{6 \cdot 5}{2} \rightarrow R_5 = 15,000 \text{KN}$$

$$M_6 = \frac{-q \cdot L^2}{12} \rightarrow M_6 = \frac{-5 \cdot 6^2}{12} \rightarrow M_6 = -15,000 \text{KN.}$$

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 15,000 \\ 15,000 \\ -15,000 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, o terceiro elemento de viga é mostrado abaixo:

Figura 21- Análise do elemento 03



Fonte: Próprio autor, 2022

Suas reações de apoio e momentos estão calculadas abaixo, seguidas de sua representação matricial:

$$R_5 = \frac{7 \cdot q \cdot L}{20} \rightarrow R_1 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4}{20} \rightarrow R_1 = 7,000 \text{KN}$$

$$M_6 = \frac{q \cdot L^2}{20} \rightarrow M_2 = \frac{5 \cdot 4^2}{20} \rightarrow M_2 = 4,000 \text{KN.m}$$

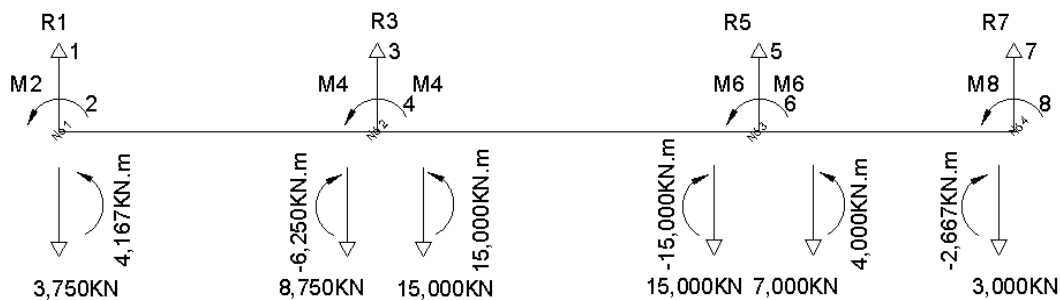
$$R_7 = \frac{3 \cdot q \cdot L}{20} \rightarrow R_3 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{20} \rightarrow R_3 = 3,000 \text{KN}$$

$$M_8 = \frac{-q \cdot L^2}{30} \rightarrow M_4 = \frac{-5 \cdot 4^2}{30} \rightarrow M_4 = -2,667 \text{KN.m}$$

$$[F_3] = \begin{bmatrix} 7,000 \\ 4,000 \\ 3,000 \\ -2,667 \end{bmatrix}$$

Colocando-se as forças calculadas em suas devidas posições, tem-se o esquema abaixo representado:

Figura 22 - Inserção das forças calculadas na estrutura



Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.1.5 Matriz de Força [F]

A determinação da matriz de força [F], pode ser realizada por meio da equação descrita abaixo:

$$[F] = [F]_{\text{nós}} - [F]_{\text{vigas}}$$

Observa-se que não há forças pontuais aplicadas sobre os nós, logo a matriz

$$[F]_{\text{Nós}} = 0, \text{ ou seja: } [F]_{\text{Nós}} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ e } [F]_{\text{vigas}} = \begin{bmatrix} 8,750 \\ -11,000 \end{bmatrix} \text{ Conforme descrito acima,}$$

$$\text{tem-se: } [F] = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,750 \\ -11,000 \end{bmatrix} \rightarrow [F] = \begin{bmatrix} -8,750 \\ 11,000 \end{bmatrix}$$

#### 4.1.6 Determinação dos deslocamentos dos nós

Através da simplificação da equação abaixo, calcula-se o sistema linear, que tem como resultado os deslocamento, de forma mais rápida quando comparado à aplicação da regra de Cramer.



$$[D] * [K_{\text{graus de liberdade}}] = [F] \rightarrow$$

$$[D] * [K_{\text{graus de liberdade}}] * [K_{\text{graus de liberdade}}]^{-1} = [K_{\text{graus de liberdade}}]^{-1} * [F] \rightarrow$$

$$[D] = [K_{\text{graus de liberdade}}]^{-1} * [F], \text{ logo:}$$

Sendo  $[K_{\text{graus de liberdade}}] = \begin{bmatrix} 44,000 & 10,000 \\ 10,000 & 50,000 \end{bmatrix}$ , tem-se que sua inversa será igual a

$$[K_{\text{graus de liberdade}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,024 & -0,005 \\ -0,005 & 0,021 \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto: } [D] = \begin{bmatrix} 0,024 & -0,005 \\ -0,005 & 0,021 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -8,750 \\ 11,000 \end{bmatrix} \rightarrow [D] = \begin{bmatrix} -0,261 \text{rad} \\ 0,272 \text{rad} \end{bmatrix}$$

#### 4.1.7 Determinação das forças internas

As forças internas podem ser calculadas pela seguinte equação:

$$[F] = [F]_{\text{Vigas}} + [M_{\text{Elemento}}] * [D]$$

No elemento 01, tem-se a representação das forças internas descritas, conforme a equação citada neste subitem.

Viga<sub>AB</sub>

$$[F_{AB}] = \begin{bmatrix} 3,750 \\ 4,167 \\ 8,750 \\ -6,250 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,880 & 7,200 & -2,880 & 7,200 \\ 7,200 & 24,000 & -7,200 & 12,000 \\ -2,880 & -7,200 & 2,880 & -7,200 \\ 7,200 & 12,000 & -7,200 & 24,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,261 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$[F_{AB}] = \begin{bmatrix} 3,750 \\ 4,167 \\ 8,750 \\ -6,250 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,877 \\ -3,129 \\ 1,877 \\ -6,257 \end{bmatrix} \rightarrow [F_{AB}] = \begin{bmatrix} 1,873 \text{ KN} \\ 1,038 \text{ KN} \cdot \text{m} \\ 10,627 \text{ KN} \\ -12,507 \text{ KN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

No elemento 02, tem-se a representação das forças internas descrita, conforme a equação citada neste subitem.

Viga<sub>BC</sub>

$$[F_{BC}] = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 15,000 \\ 15,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,667 & 5,000 & -1,667 & 5,000 \\ 5,000 & 20,000 & -5,000 & 10,000 \\ -1,667 & -5,000 & 1,667 & -5,000 \\ 5,000 & 10,000 & -5,000 & 20,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,000 \\ -0,261 \\ 0,000 \\ -0,272 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$[F_{BC}] = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 15,000 \\ 15,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,057 \\ -2,493 \\ 0,057 \\ 2,836 \end{bmatrix} \rightarrow [F_{BC}] = \begin{bmatrix} 15,057 \text{ KN} \\ 12,507 \text{ KN} \cdot m \\ 14,943 \text{ KN} \\ -12,164 \text{ KN} \cdot m \end{bmatrix}$$

No elemento 03, tem-se a representação das forças internas descrita, conforme a equação citada neste subitem.

Viga<sub>CD</sub>

$$[F_{CD}] = \begin{bmatrix} 7,000 \\ 4,000 \\ 3,000 \\ -2,667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,625 & 11,250 & -5,625 & 11,250 \\ 11,250 & 30,000 & -11,250 & 15,000 \\ -5,625 & -11,250 & 5,625 & -11,250 \\ 11,250 & 15,000 & -11,250 & 30,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,272 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$[F_{CD}] = \begin{bmatrix} 7,000 \\ 4,000 \\ 3,000 \\ -2,667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,062 \\ 8,164 \\ -3,062 \\ 4,082 \end{bmatrix} \rightarrow [F_{CD}] = \begin{bmatrix} 10,062 \text{ KN} \\ 12,164 \text{ KN} \cdot m \\ -0,062 \text{ KN} \\ 1,415 \text{ KN} \cdot m \end{bmatrix}$$

## 4.2 Verificação dos resultados

De acordo com a figura 22, os valores são verificados no Software de simulação computacional ANSYS, que faz a análise através do método dos elementos finitos, ou seja, realiza a discretização do contínuo em uma malha de tamanho definido pelo usuário, e a precisão se dá de acordo com o aumento do número de nós da discretização. Como exposto acima, quanto maior for o detalhamento da malha maior será o trabalho computacional para a realização do cálculo, vide figura 27 até a figura 34.

Conforme exposto no item 4, este trabalho se constitui de uma análise numérica de um elemento de viga de seção na forma de retangular engastada em duas extremidades e com dois apoios entre os engastes.

Os passos do processo foram descritos no item 4 e seus subitens, possibilitando ao leitor fazer uma análise e verificação do modelo realizado, além de mostrar os critérios utilizados.

A fim de fazer a verificação dos resultados encontrados de forma analítica, foi realizada a simulação no ANSYS com refinamentos de malhas que variam de 100mm, 50mm, 25mm e 10mm.

Além disso, uma análise similar foi realizada no software FTOOL, que é bastante difundido no meio acadêmico, sobretudo devido a sua facilidade de uso e à rapidez de seus resultados.

Verificou-se, através das análises, que as diferenças entre os resultados no modelo numérico e os encontrados pelo modo analítico são quase nulas, comprovando a confiabilidade dos Softwares ANSYS e FTOOL, mostrando a eficácia de realizar análises estruturais, como as expostas acima, bem como em estruturas de um grau de complexidade mais elevado.

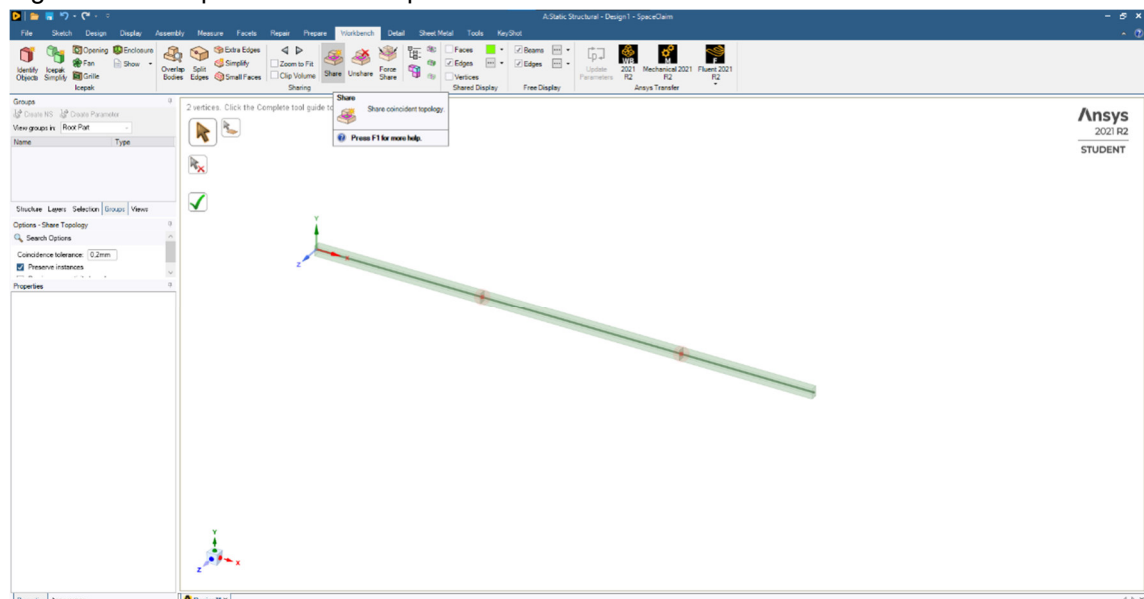
Seguem as análises dos refinamentos, comentadas acima, bem como um gráfico comparativo dos esforços e deslocamentos de acordo com o grau de discretização do contínuo.

#### 4.2.1 Ambiente ANSYS

Tratamos a seguir da criação do elemento viga dentro do ambiente ANSYS

A figura abaixo mostra o compartilhamento de pontos entre as estruturas, o que permite uma redução no número de equações e agiliza o trabalho computacional.

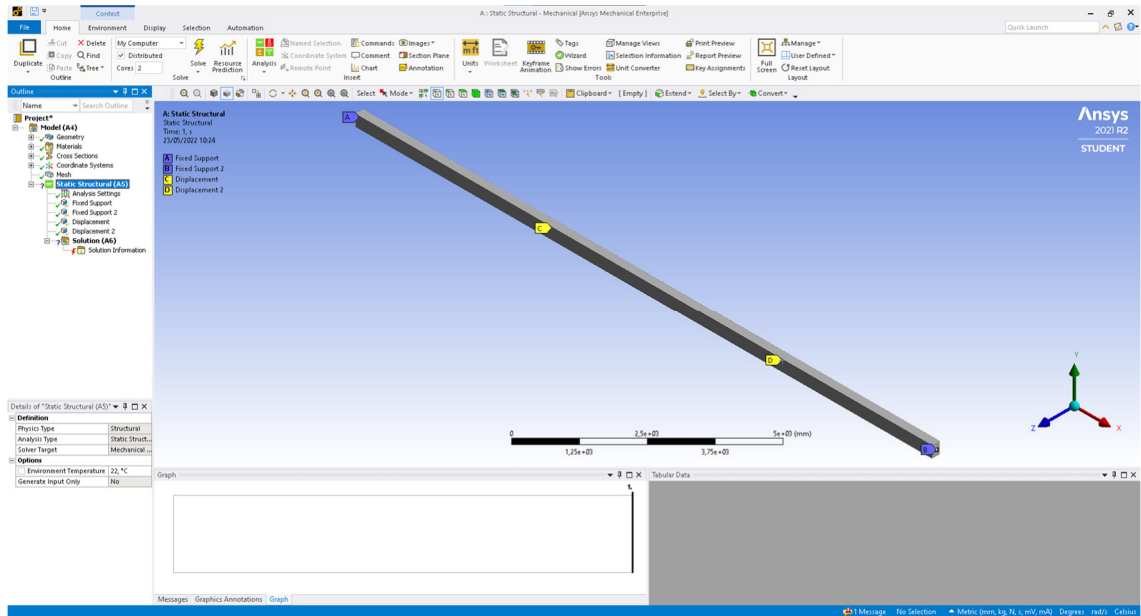
Figura 23 - Compartilhamento de pontos estruturais



Fonte: Próprio autor, 2022

A figura abaixo mostra os engastes nos pontos A e B, assim como os apoios nos pontos C e D.

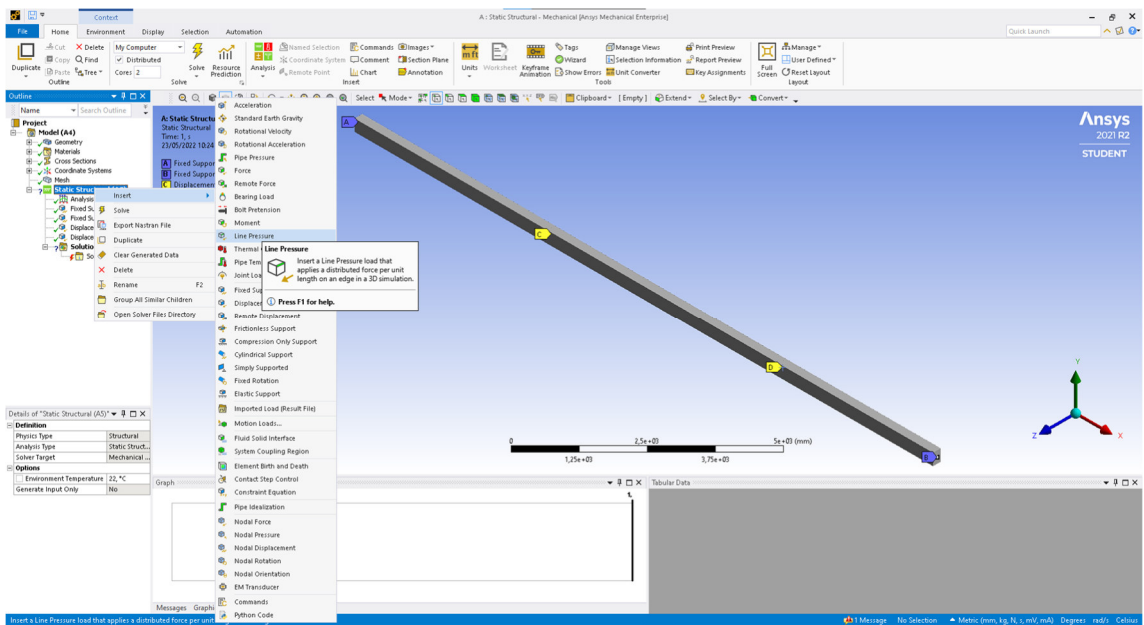
Figura 24 - Apoios e engastes



Fonte: Próprio autor, 2022

Por sua vez, a figura a seguir mostra o carregamento retangular distribuído no trecho C e D.

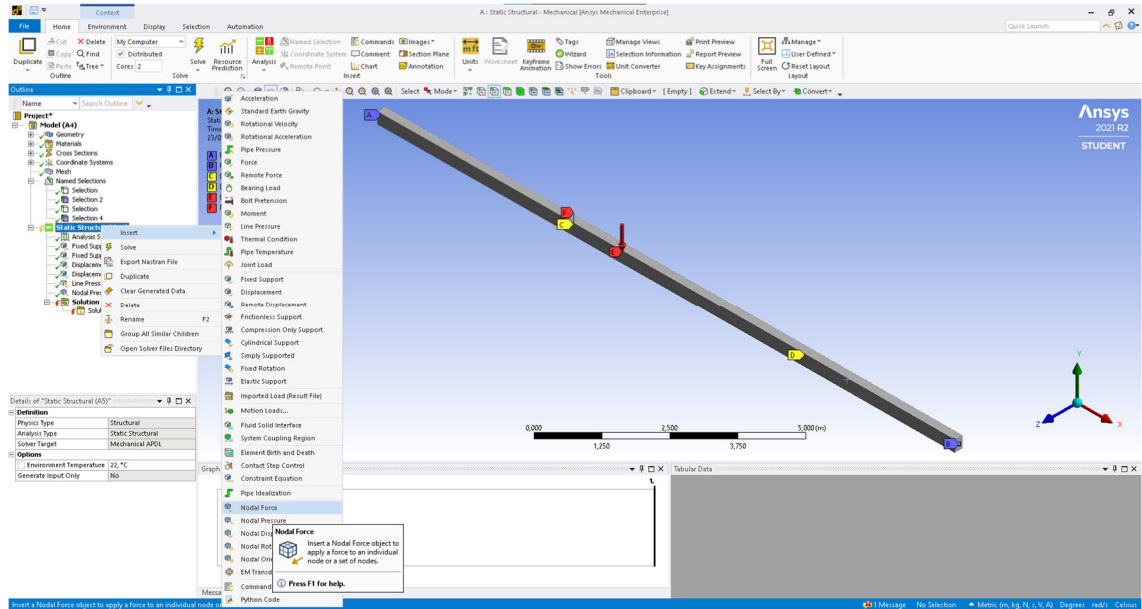
Figura 25 - Carregamento retangular distribuído



Fonte: Próprio autor, 2022

Por fim, a próxima figura abaixo mostra o carregamento triangular distribuído no trecho A e B.

Figura 26 - Carregamento triangular distribuído



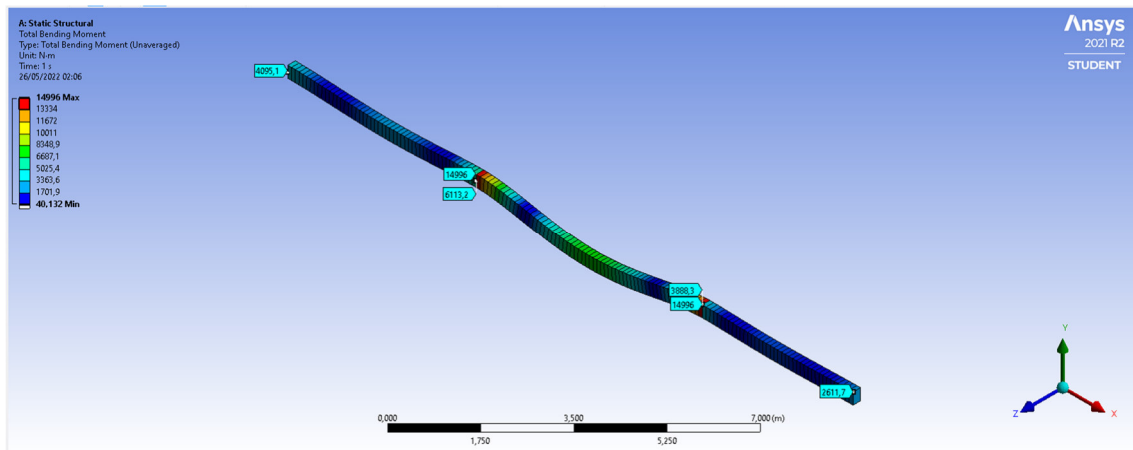
Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.2.2 Refinamento da malha (Esforço cortante e momento fletor)

O processo de refinamento de malhas tem como objetivo aumentar a precisão na simulação.

No primeiro refinamento, com uma malha de 100mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 1,39% nas reações de apoio e 1,83% nos momentos fletores em relação ao método analítico.

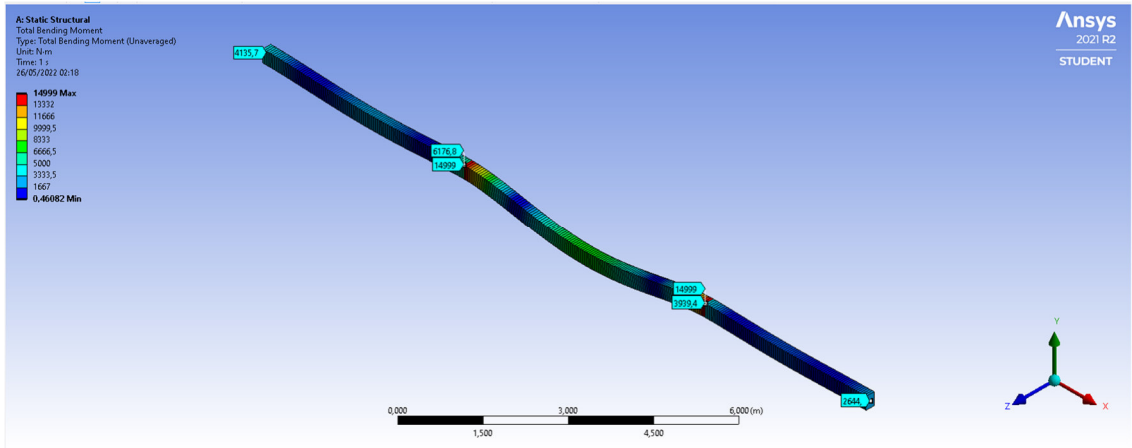
Figura 27 - Refinamento em malha de 100mm.



Fonte: Próprio autor, 2022

No segundo refinamento, com uma malha de 50mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 0,66% nas reações de apoio e 0,87% nos momentos fletores em relação ao método analítico.

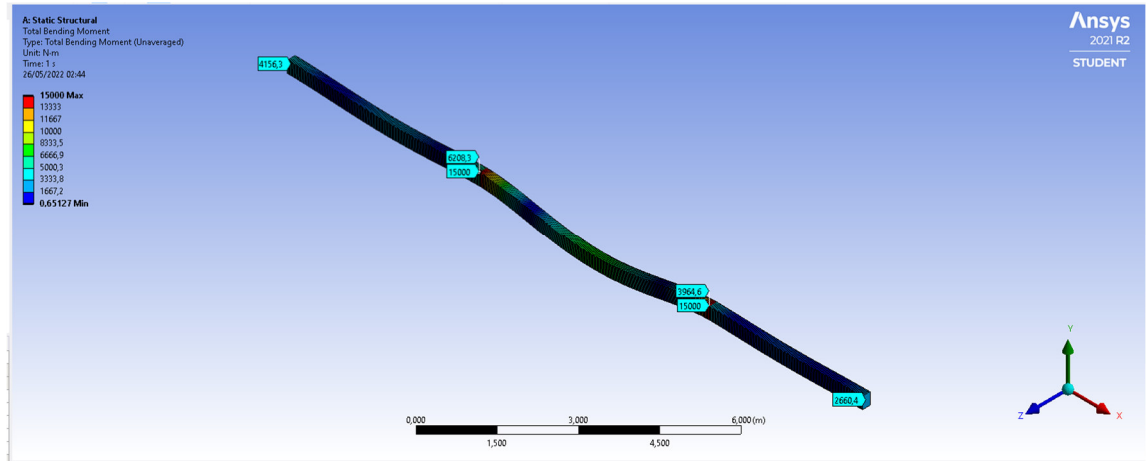
Figura 28 - Refinamento em malha de 50mm.



Fonte: Próprio autor, 2022

No terceiro refinamento, com uma malha de 25mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 0,28% nas reações de apoio e 0,39% nos momentos fletores em relação ao método analítico.

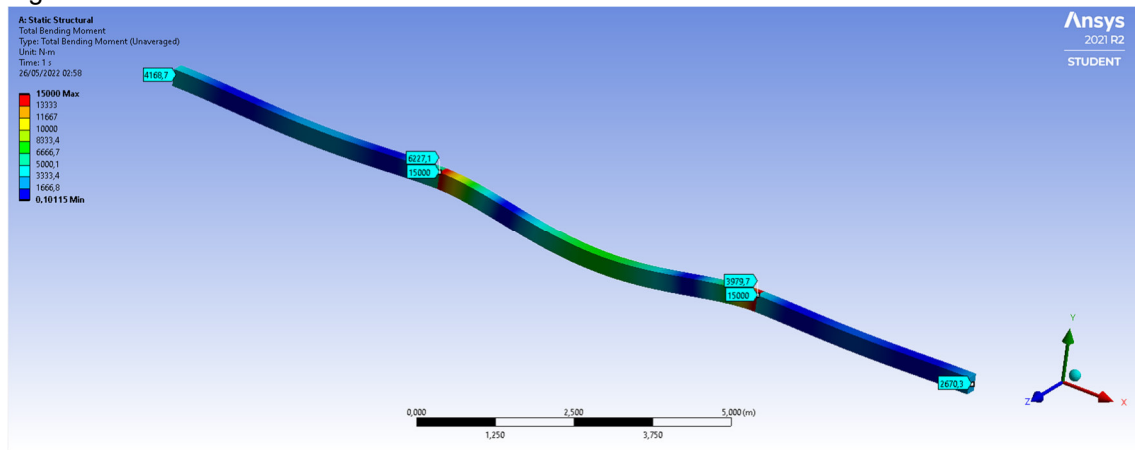
Figura 29 - Refinamento em malha de 25mm.



Fonte: Próprio autor, 2022

No quarto e último refinamento, com uma malha de 10mm verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 0,05% nas reações de apoio e 0,10% nos momentos fletores em relação ao método analítico.

Figura 30 - Refinamento em malha de 10mm.

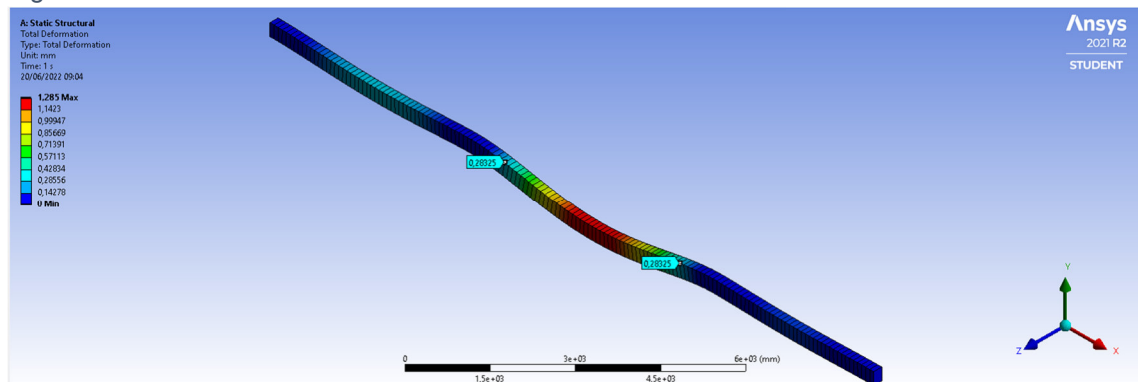


Fonte: Próprio autor, 2022

#### 4.2.3 Refinamento da malha (Deslocamentos)

No primeiro refinamento, com uma malha de 100mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 3,10% nos deslocamentos em relação ao método analítico.

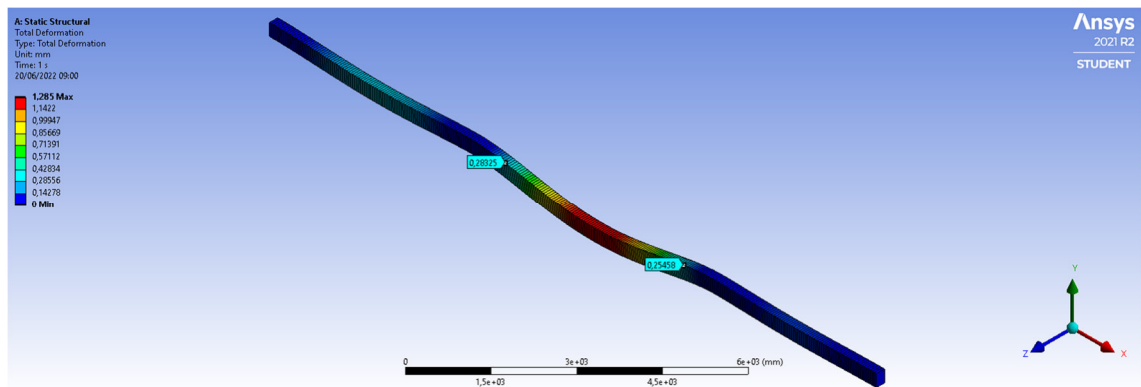
Figura 31 - Refinamento em malha de 100mm



Fonte: Próprio autor, 2022

No segundo refinamento, com uma malha de 50mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 2,79% nos deslocamentos em relação ao método analítico.

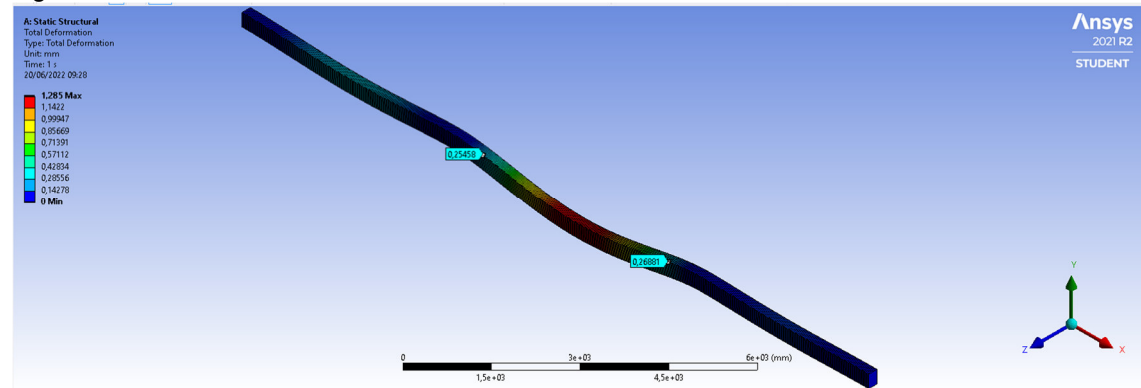
Figura 32 - Refinamento em malha de 50mm



Fonte: Próprio autor, 2022

No terceiro refinamento, com uma malha de 25mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 1,12% nos deslocamentos em relação ao método analítico.

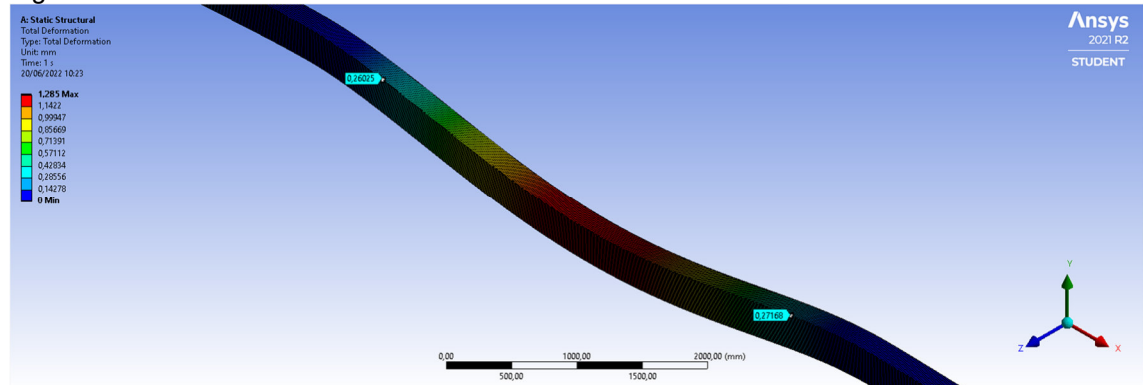
Figura 33 - Refinamento em malha de 25mm



Fonte: Próprio autor, 2022

No quarto refinamento, com uma malha de 10mm, verifica-se, através da Tabela 4, que houve um desvio padrão de 0,12% nos deslocamentos em relação ao método analítico.

Figura 34 - Refinamento em malha de 10mm



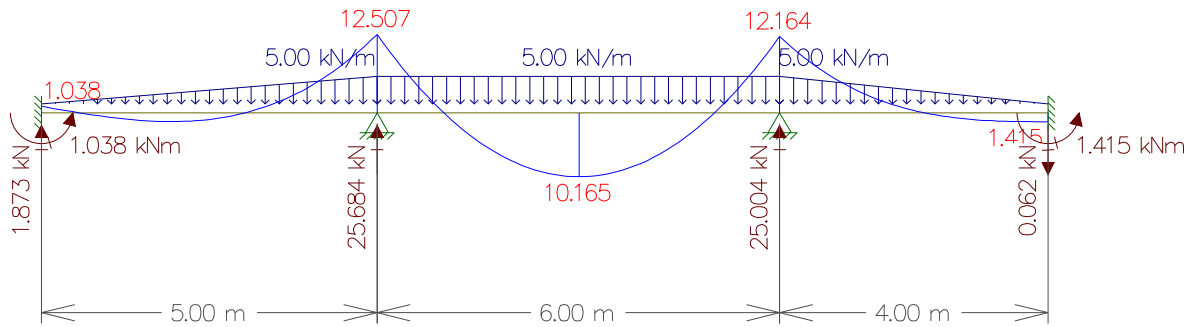
Fonte: Próprio autor, 2022



#### 4.2.4 Resultados no FTOOL

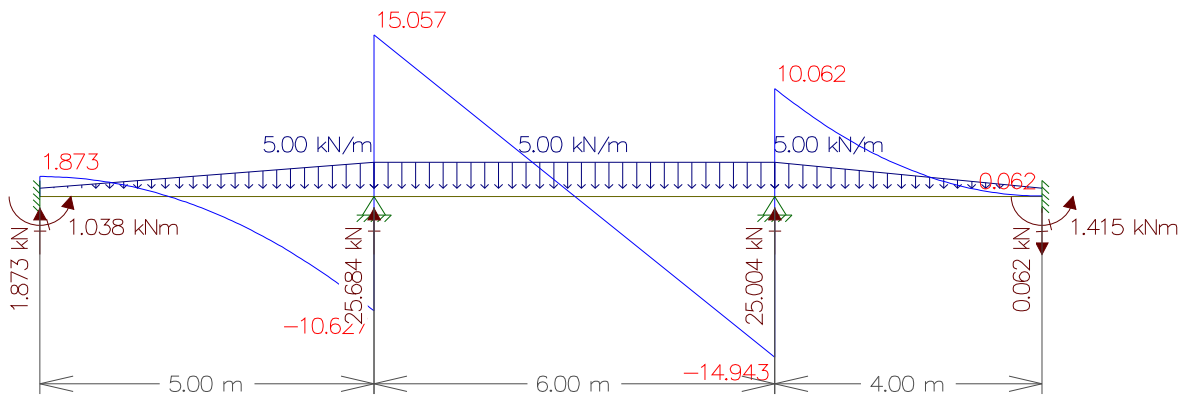
A seguir a verificação dos resultados feitos no software FTOOL, os quais estão alinhados às resoluções encontradas acima.

Figura 35 - Análise do Momento Fletor no FTOOL



Fonte: Próprio autor, 2022

Figura 36 - Análise do Esforço Cortante no FTOOL



Fonte: Próprio autor, 2022

## 5 TABELAS E RESULTADOS

As tabelas abaixo apresentam as análises comparativas entre o método analítico e o software de simulação ANSYS, cujas verificações de precisão e eficácia do software, são observadas na tabela 4, conforme destacamos, quanto maior for o refinamento, maior será a precisão.

Na tabela 01, são mostrados os valores encontrados no método analítico, onde as malhas são apresentadas para fins didáticos.

Tabela 1 - Método analítico

Malha	R1(KN)	R3(KN)	R5(KN)	R7(KN)	M2(KN.m)	M4(KN.m)	M6(KN.m)	M8(KN.m)	D4(rad)	D6(rad)
100mm	3,750	23,750	22,000	3,000	4,167	-8,750	11,000	-2,667	-0,261	0,272
50mm	3,750	23,750	22,000	3,000	4,167	-8,750	11,000	-2,667	-0,261	0,272
25mm	3,750	23,750	22,000	3,000	4,167	-8,750	11,000	-2,667	-0,261	0,272
10mm	3,750	23,750	22,000	3,000	4,167	-8,750	11,000	-2,667	-0,261	0,272

Fonte: Próprio autor, 2022

Na tabela 02, são mostrados os valores encontrados no método dos elementos finitos.

Tabela 2 - Método dos Elementos Finitos

Malha	R1(KN) <sub>MEF</sub>	R3(KN) <sub>MEF</sub>	R5(KN) <sub>MEF</sub>	R7(KN) <sub>MEF</sub>	M2(KN.m) <sub>MEF</sub>	M4(KN.m) <sub>MEF</sub>	M6(KN.m) <sub>MEF</sub>	M8(KN.m) <sub>MEF</sub>	D4(rad) <sub>MEF</sub>	D6(rad) <sub>MEF</sub>
100mm	3,680	23,820	22,069	2,931	4,095	-8,883	11,108	-2,612	-0,283	0,283
50mm	3,717	23,783	22,032	2,967	4,136	-8,822	11,060	-2,644	-0,255	0,255
25mm	3,735	23,765	22,014	2,986	4,156	-8,792	11,035	-2,660	-0,254	0,269
10mm	3,747	23,753	22,002	2,998	4,168	-8,773	11,020	-2,670	-0,260	0,272

Fonte: Próprio autor, 2022

Na tabela 03, são mostrados os percentuais de precisão entre os dois métodos.

Tabela 3 - Análise Comparativa

Malha	%R1	%R3	%R5	%R7	%M2	%M4	%M6	%M8	%D4	%D6
100mm	98,13%	100,29%	100,31%	97,70%	98,27%	101,52%	100,98%	97,94%	108,43%	104,04%
50mm	99,12%	100,14%	100,15%	98,90%	99,25%	100,83%	100,54%	99,14%	97,70%	93,75%
25mm	99,61%	100,06%	100,06%	99,55%	99,74%	100,48%	100,32%	99,74%	97,32%	98,90%
10mm	99,91%	100,01%	100,01%	99,93%	100,02%	100,26%	100,18%	100,11%	99,71%	99,88%

Fonte: Próprio autor, 2022

Na tabela 04, são mostradas as médias e o desvios padrões das reações de apoio, dos momentos fletores e dos deslocamentos, bem como os percentuais de precisão entre os dois métodos.

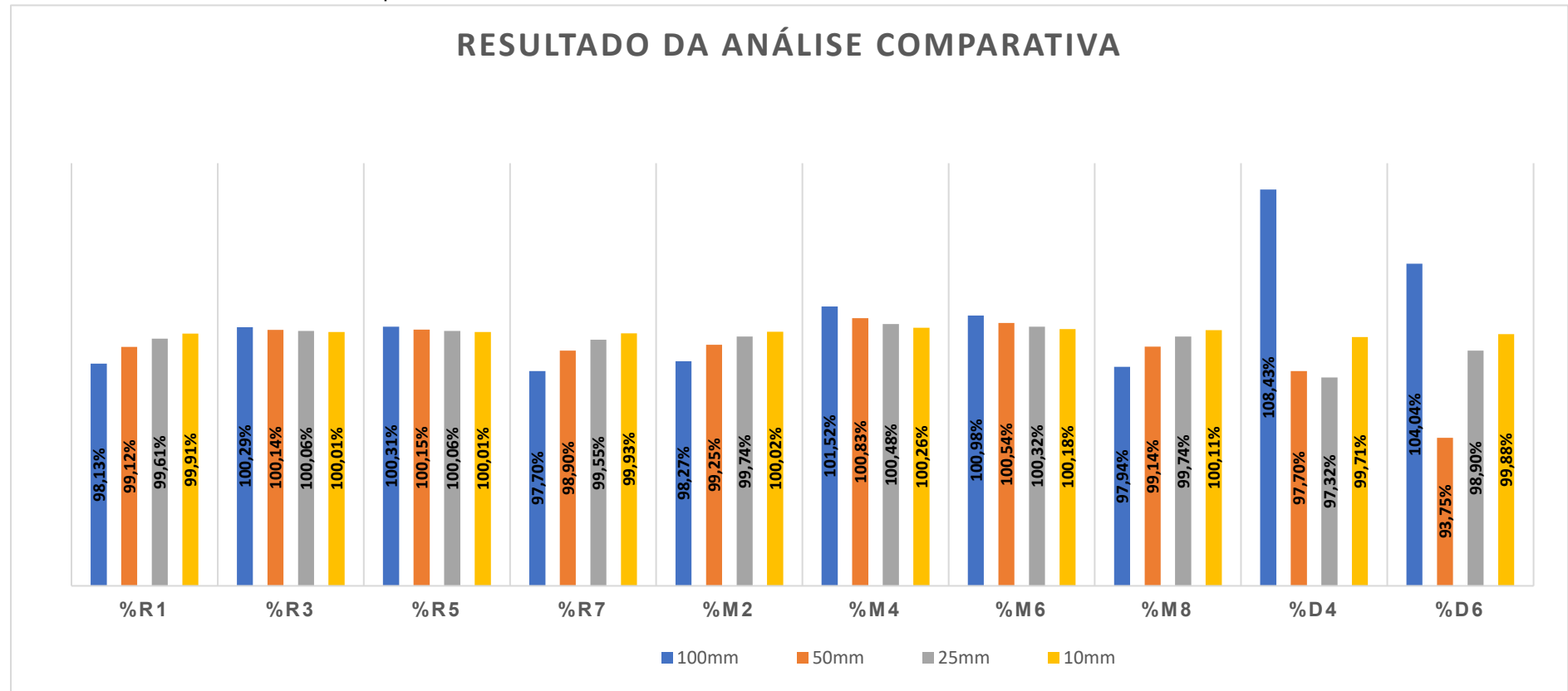
Tabela 4 - Análise estatística das reações, momentos e deslocamentos

Malha	MÉDIAS			DESVIO PADRÃO		
	Reações_MED	Momentos_MED	Deslocamentos_MED	Reações_DP	Momentos_DP	Deslocamentos_DP
100mm	99,11%	99,68%	96,62%	1,39%	1,83%	3,10%
50mm	99,58%	99,94%	97,83%	0,66%	0,87%	2,79%
25mm	99,82%	100,07%	98,18%	0,28%	0,39%	1,12%
10mm	99,97%	100,15%	99,80%	0,05%	0,10%	0,12%

Fonte: Próprio autor, 2022

O presente gráfico, retrata o grau de precisão obtido de acordo com o grau de refinamento da malha dos elementos em análise.

Gráfico 1 - Resultado da Análise Comparativa



Fonte: Próprio autor, 2022

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Baseando-se na finalidade de transcorrer um estudo sobre o procedimento numérico do método dos elementos finitos, destacando-se a importância em diversas áreas da tecnologia, bem como da engenharia civil. O presente trabalho explanou de forma concisa sobre o referido método.

Em meio aos desafios encontrados nas modelagens numéricas, verifica-se que, por meio desta análise, ao se aplicar este método em estruturas complexas, há um ganho de tempo e de capacidade de resultados, tendo em mente que isso também demanda um custo computacional elevado, proporcional à complexidade do problema.

É de grande relevância o estudo do método dos elementos finitos a nível de graduação, haja vista, a afinidade desse método com problemas complexos, que serão tratados com mais naturalidade em situações reais do dia a dia.

Em trabalhos futuros, sugere-se a aplicação do método, não só em estruturas sólidas, mas também em fluídos, fazendo uso das equações de Navier Stokes, juntamente com o teorema de Gauss aplicado ao método dos volumes finitos e muito usado na indústria de aeronáutica e naval.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. 1. ed. Porto - Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- ALVES FILHO, AVELINO. **Elementos Finitos a Base da Tecnologia CAE**, 5. ed. São Paulo: Érica, 2010.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008
- HARISH, A. **Finite Element Method – What Is It? FEM and FEA Explained**. Dez. 2020. Disponível em: <https://www.simscale.com/blog/2016/10/what-is-finite-element-method/>. Acesso em 02 maio. 2022.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: conceitos e Método Básicos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- PINTO, F. A. A. **Vigas Notas de aula**. Universidade Federal do Paraná, 2000.
- Hibbeler, R.C. **Resistência dos Materiais**, 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2009.
- SILVA, S. F. O. método das diferenças finitas aplicado à viga de Euler: comportamento estático e dinâmico. **Revista Traços**, Belém, v.10, n.21, p. 9-22, jun. 2008.
- SOUZA, M. F. S. M.; RODRIGUES, R. B. **Sistemas Estruturais de edificações e exemplos**. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2008.